

DOI:10.19936/j.cnki.2096-8000.20230228.004

正交各向异性材料断裂分析的插值型无单元伽辽金比例边界法

王娟¹, 陈杨², 肖树聪¹

(1. 新余学院 建筑工程学院, 新余 338004; 2. 西南交通大学 土木工程学院, 成都 610031)

摘要: 插值型无单元伽辽金比例边界法是一种在改进的插值型移动最小二乘法框架下, 结合了比例边界法和无单元伽辽金法长处的半解析数值方法。这种方法通过引入比例边界坐标系, 只需在求解域的环向上进行数值离散, 在径向上采用解析的方法进行计算, 处理各向同性材料断裂问题时拥有可观的精度与效率。为进一步发挥这种方法的显著优势并提高其适用性, 将插值型无单元伽辽金比例边界法运用于正交各向异性材料断裂分析研究中。最后利用两种不同裂纹形式的数值算例证实了本文方法的有效性与准确性。

关键词: 插值型无单元伽辽金比例边界法; 正交各向异性材料; 断裂问题; 应力强度因子; 复合材料

中图分类号: TB332 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-8000(2023)02-0034-05

Analysis of interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for fracture problems in orthotropic materials

WANG Juan¹, CHEN Yang², XIAO Shucong¹

(1. School of Architectural Engineering, Xinyu University, Xinyu 338004, China;

2. Department of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The interpolating element-free Galerkin scaled boundary method is a semi-analytical numerical method which combines the advantages of the scaled boundary method and the element-free Galerkin method under the framework of improved interpolating moving least-squares method. By introducing the scaled boundary coordinate system, this method only needs to perform numerical discretization on the boundary of the computational domain and solve the problem by using the analytical method in the radial direction, which has considerable accuracy and efficiency in analyzing the fracture problem of isotropic materials. In order to make full use of the virtues of this method and improve its service ability, the interpolating element-free Galerkin scaled boundary method is proposed to study the fracture of orthotropic materials. Finally, two numerical examples of different crack forms are used to certify the effectiveness and precision of the method.

Key words: interpolating element-free Galerkin scaled boundary method; orthotropic materials; fracture problems; stress intensity factor; composites

随着现代科学技术的迅速发展, 正交各向异性材料作为一种具有众多优良特性的复合材料, 在土木工程、航天航空工程、机械工程中得到广泛应用, 并日益突显其优越性。然而其在制备及服役过程中会由于制造工艺和外部环境因素产生裂纹, 从而严重影响结构的安全性。所以, 非常有必要对正交各向异性材料的断裂问题进行准确的工程计算。由于解析法只适于求解几何模型、外力及裂缝形式相对简单的结构, 实验法费用相对较高而且精度无法保

证, 故研究正交各向异性材料断裂问题需要更多地借助于数值分析方法^[1-2]。

在众多数值方法中, 有限元法^[3-4]发展较为成熟, 该方法简单直观, 一般计算精度也较高。然而采用有限元法分析断裂问题时, 在裂纹附近需要划分较密的网格。此外, 当裂纹发生扩展后, 必须反复进行网格重构, 计算工作量较大, 精度严重受损。无单元法^[5-6]作为一种基于有限元法而具有发展潜力的数值计算方法, 在模拟大变形与裂纹扩展等问题时

收稿日期: 2022-02-21

基金项目: 江西省教育厅科学技术研究项目 (GJJ191071, GJJ212324, GJJ212311)

作者简介: 王娟 (1992—), 女, 硕士, 讲师, 主要从事计算复合材料力学方面的研究, wangjuan_xyxy@163.com。

无须进行网格重新划分,不但具有强大的自适应能力,而且保证了结果的精度。依据形函数构造、微分方程建立及边界条件引入方法的区别,目前发展了十几种无单元法。其中,插值型无单元伽辽金比例边界法^[7-9]是一种结合了无单元法与比例边界法^[10-11]优点的新兴数值方法,这种方法仅需在求解域的环向上利用无单元伽辽金法^[12-13]离散,即可达到降低分析规模的目的,从而极大地简化了计算;进一步地,采用解析法在不需要离散的径向上进行求解,计算准确。而且这种方法基于改进的插值型移动最小二乘法^[14-15],相对于移动最小二乘法^[16],不但构造出的形函数具备 Kronecker delta 特性,方便引入本质边界条件,并且待定系数减少了一个,大大提高了计算效率。

目前,插值型无单元伽辽金比例边界法已经被成功地运用到各向同性材料的裂纹分析中^[17-18],本文在已有研究工作基础之上,采用这一方法进一步处理正交各向异性材料断裂问题。首先,建立了正交各向异性材料断裂分析的基本方程。其次,利用矩阵函数与 Schur 分解相并行的技术^[19]进行求解。然后,直接依据公式计算得出裂尖的应力强度因子。最后,采用本文方法计算和对比分析了两个典型算例,并验证了此方法的精确性与适应性。

1 正交各向异性材料断裂分析的基本方程

对于正交各向异性材料,其平衡方程为:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 和 \mathbf{f} 分别为应力和体力; \mathbf{L} 为梯度算子。

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2)$$

几何方程与本构方程分别为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 \mathbf{u} 分别为应变和位移; \mathbf{D} 为弹性矩阵。

相应的位移与力边界条件为:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad (6)$$

式中: $\bar{\mathbf{u}}$ 与 $\bar{\mathbf{t}}$ 分别为求解域边界上确定的位移与面力; \mathbf{n} 为边界的单位外法线方向余弦。

2 插值型无单元伽辽金比例边界法理论公式推导

2.1 改进的插值型移动最小二乘法的插值原理

区别于比例边界法,插值型无单元伽辽金比例边界法运用边界上布置的节点,在分段的边界上独立地进行近似,设在某一边界段 S_i 上有 n 个节点 s_1, s_2, \dots, s_n ,其中 s 表示边界段 S_i 上从起点开始的弧长。定义 $p_1(s), p_2(s), \dots, p_m(s)$ 为已知的一组基函数,用以建立形函数,这里 $p_1(s) \equiv 1$ 。为确保权函数满足非奇异性及形函数具备插值特性,将以上的基函数进行变换后形成的新基函数表示为:

$$\hat{p}_i(\bar{s})_s = p_i(\bar{s}) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) p_i(s_l) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (7)$$

式中: \bar{s} 为点 s 局部影响域中的点; s_l 为边界上影响域覆盖 s 的节点;函数 $v(s, s_l)$ 采用式(8)所示形式。

$$v(s, s_l) = \prod_{J \neq l} \frac{s - s_J}{s_l - s_J} \quad (8)$$

将函数 $u(s)$ 也进行与式(7)相同的变换。

$$\hat{u}(\bar{s})_s = u(\bar{s}) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) u(s_l) \quad (9)$$

下面利用最小二乘法构造 $\hat{u}(\bar{s})_s$ 的逼近函数,具体形式如下:

$$\hat{u}^h(\bar{s})_s = \sum_{i=1}^m \hat{p}_i(s)_s \hat{a}_i(s) = \sum_{i=2}^m \hat{p}_i(s)_s \hat{a}_i(s) \quad (10)$$

式中, $a_i(s)$ 为待定系数。

运用加权最小二乘法,使 $\hat{u}(\bar{s})_s$ 与其逼近函数 $\hat{u}^h(\bar{s})_s$ 在点 s 的局部影响域内无限接近,为此定义泛函数为:

$$J = \sum_{l=1}^n w_l(s) [\hat{u}^h(s_l)_s - \hat{u}(s_l)_s]^2 \quad (11)$$

式中, $w_l(s)$ 可任取传统移动最小二乘法中的非奇异权函数。

取极值后可求得:

$$\hat{\mathbf{u}}(s) = \mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u} \quad (12)$$

式中,

$$\mathbf{A}(s) = \sum_{l=1}^n w_l(s) \hat{\mathbf{p}}(s_l)_s \hat{\mathbf{p}}^T(s_l)_s \quad (13)$$

$$\mathbf{B}(s) = \sum_{l=1}^n w_l(s) \hat{\mathbf{p}}(s_l)_s [\mathbf{e}_l - \mathbf{v}(s)] \quad (14)$$

$$\mathbf{u} = [u(s_1), u(s_2), \dots, u(s_n)]^T \quad (15)$$

其中, \mathbf{e}_l 为一个 $1 \times n$ 的单位矩阵。

结合式(9)、式(10)和式(12), 可得 $u^h(s)$ 为:

$$u^h(s) = \Phi(s)u = \sum_{l=1}^n \phi_l(s)u(s_l) \quad (16)$$

式中, $\Phi(s)$ 为形函数矩阵, 具体为:

$$\Phi(s) = [\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s)] \quad (17)$$

$$= \mathbf{v}(s) + \mathbf{g}^T(s)\mathbf{A}^{-1}(s)\mathbf{B}(s) \quad (17)$$

$$\mathbf{g}^T(s) = [g_2(s), g_3(s), \dots, g_m(s)] \quad (18)$$

$$g_i(s) = p_i(s) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l)p_i(s_l) \quad (19)$$

2.2 控制方程的推导与求解

利用本文方法分析断裂问题时, 需借助一个比例边界坐标系 (ξ, s) , 具体见图 1, 图中 $O(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ 为相似中心; ξ 为径向坐标, 取值范围为 $[0, 1]$; s 为环向坐标, 沿着边界 S 相对于相似中心逆时针方向。模拟时, 令裂尖为相似中心, 则求解域内直角坐标 (\hat{x}, \hat{y}) 与比例边界坐标 (ξ, s) 的关系可写为:

$$\hat{x} = \xi x(s), \hat{y} = \xi y(s) \quad (20)$$

式中: $(x(s), y(s))$ 为求解域边界上任一点的坐标; (\hat{x}, \hat{y}) 为求解域内点的坐标。

基于式(16), 求解域内任一点的位移可表示为:

$$\mathbf{u}(\xi, s) = \Phi(s)\mathbf{u}(\xi) \quad (21)$$

式中, $\mathbf{u}(\xi)$ 为径向上的节点位移函数。若不计体力, 结合上式与虚功方程, 可得到基本方程为:

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} + (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(\xi) = 0 \quad (22)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{E}_0 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{u}(\xi) \big|_{\xi=1} \quad (23)$$

式中: \mathbf{p} 为等效节点力向量; \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 为系数矩阵。

$$\mathbf{E}_0 = \int_S \mathbf{B}_1(s)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1(s) |\mathbf{J}| ds \quad (24)$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_S \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1(s) |\mathbf{J}| ds \quad (25)$$

$$\mathbf{E}_2 = \int_S \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2(s) |\mathbf{J}| ds \quad (26)$$

式中: $\mathbf{B}_1(s)$ 和 $\mathbf{B}_2(s)$ 为应变矩阵; $|\mathbf{J}|$ 为雅可比行列式。

$$\mathbf{B}_1(s) = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y(s)_{,s} & 0 \\ 0 & -x(s)_{,s} \\ -x(s)_{,s} & y(s)_{,s} \end{bmatrix} \Phi(s) \quad (27)$$

$$\mathbf{B}_2(s) = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} -y(s) & 0 \\ 0 & x(s) \\ x(s) & -y(s) \end{bmatrix} \Phi(s)_{,s} \quad (28)$$

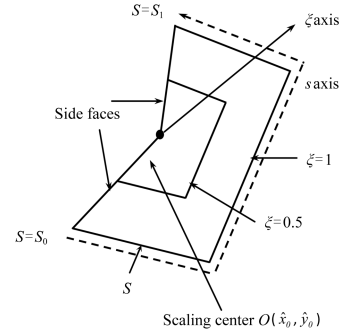


图 1 比例边界坐标系

Fig. 1 Scaled boundary coordinate system

为了便于降阶求解, 引入 $\mathbf{u}(\xi)$ 的对偶变量 $\mathbf{q}(\xi)$, 则式(22)可转换为:

$$\xi \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\xi) \\ \mathbf{q}(\xi) \end{bmatrix}_{,\xi} = -\mathbf{Z} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\xi) \\ \mathbf{q}(\xi) \end{bmatrix} \quad (29)$$

其中,

$$\mathbf{q}(\xi) = \mathbf{E}_0 \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{u}(\xi) \quad (30)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T & -\mathbf{E}_0^{-1} \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2 & -\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \end{pmatrix} \quad (31)$$

将矩阵 \mathbf{Z} 进行 Schur 分解, 可得:

$$\mathbf{Z} = \Psi \mathbf{S} \Psi^{-1} \quad (32)$$

式中,

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left[\mathbf{S}_1 \cdots \mathbf{S}_{N-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{S}_{N+2} \cdots \mathbf{S}_{2N} \right] \quad (33)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1^u \cdots \psi_{N-1}^u & \psi_N^u & \psi_{N+1}^u & \cdots & \psi_{2N}^u \\ \psi_1^q \cdots \psi_{N-1}^q & \psi_N^q & \psi_{N+1}^q & \cdots & \psi_{2N}^q \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\lambda(\mathbf{S}_1) \leq \lambda(\mathbf{S}_2) \leq \cdots \leq \lambda(\mathbf{S}_{2N}) \quad (35)$$

其中: \mathbf{I} 为 2×2 的单位矩阵; $\lambda(\mathbf{S}_i)$ 为分块矩阵 \mathbf{S}_i 的特征值实部。

$$\lambda(\mathbf{S}_i) = -\lambda(\mathbf{S}_{2N+1-i}) \quad (36)$$

刚度矩阵进而可表示为:

$$\mathbf{K}_{\text{IEFG-SBM}} = (\psi_1^q \cdots \psi_{N-1}^q \psi_N^q) (\psi_1^u \cdots \psi_{N-1}^u \psi_N^u)^{-1} \quad (37)$$

进一步地, 边界节点位移 $\mathbf{u}(\xi=1)$ 可通过下式的平衡方程求解得到:

$$\mathbf{K}_{\text{IEFG-SBM}} \mathbf{u}(\xi=1) = \mathbf{p} \quad (38)$$

求解域内任一点对应的位移场与应力场分别为:

$$\mathbf{u}(\xi, s) = \Phi(s) \left(\sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^u \xi^{-S_i} \mathbf{c}_i + \psi_N^u \mathbf{c}_N \right) \quad (39)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi, s) = \sum_{i=1}^{N-1} \psi_{\sigma i}^q(s) \xi^{-S_i-1} \mathbf{c}_i \quad (40)$$

式中,

$$\mathbf{c} = (\psi_1^u \cdots \psi_{N-1}^u \psi_N^u)^{-1} \mathbf{u}(\xi=1) \quad (41)$$

$$\psi_{\sigma_i}(s) = D[-B_1(s)\psi_i^u S_i + B_2(s)\psi_i^u] \quad (42)$$

根据上述表达式计算出的位移与应力结果在径向上是准确的。故裂尖的应力强度因子可直接通过式(43)与式(44)计算得到:

$$K_{\perp} = \lim_{\hat{r} \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\hat{r}} \sigma_y |_{\theta=0} \quad (43)$$

$$K_{\parallel} = \lim_{\hat{r} \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\hat{r}} \tau_{xy} |_{\theta=0} \quad (44)$$

式中, \hat{r} 与 θ 为如图 2 所示的极坐标。

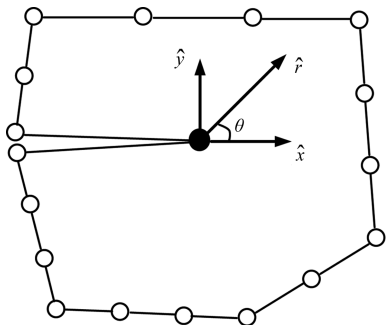


图 2 裂纹端的局部坐标系

Fig. 2 Local coordinate system associated with a crack tip

3 算例分析

3.1 剪切型问题

一块含有边界水平裂纹的正交各向异性矩形板, 其下端固定, 上端受均匀切应力 τ 作用(见图 3), 板的尺寸为 $b \times 2b$, 裂纹长 $a = 0.5b$, 材料 1 方向弹性模量 $E_1 = 144.8 \text{ GPa}$, 2 方向弹性模量 $E_2 = 11.7 \text{ GPa}$, 剪切模量 $G_{12} = 9.66 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu_{12} = 0.21$ 。

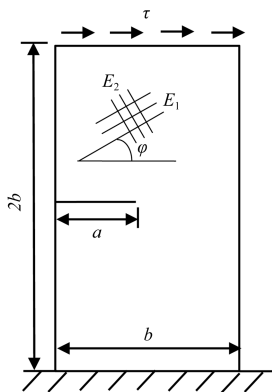


图 3 正交各向异性剪切板

Fig. 3 Orthotropic plate under shear

分析时将裂尖处设置为相似中心, 在求解域边界上设置的节点如图 4 所示, 共计 61 个节点, 表 1 给出了不同材料主方向 φ 下对应的裂尖应力强度因子。为方便进行对比与验证, 表 1 同时还列出了采用比例边界有限元法分析的结果^[20], 通过比较可

见, 采用这两种数值方法得到的应力强度因子较为吻合, 从而说明采用插值型无单元伽辽金比例边界法分析正交各向异性材料断裂问题是可行的。

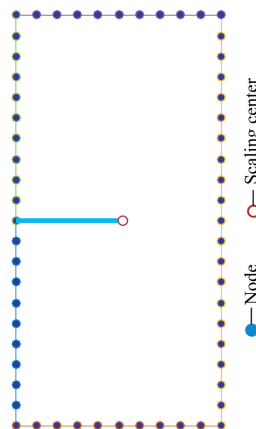


图 4 正交各向异性板的离散模型

Fig. 4 Discretization model of the orthotropic plate

表 1 不同材料主方向下对应的正则化应力强度因子
Table 1 Normalized stress intensity factors for different material main directions

φ /°	$K_{\perp} / \tau \sqrt{\pi a}$		$K_{\parallel} / \tau \sqrt{\pi a}$	
	本文解	文献[20]	本文解	文献[20]
0	8.858	8.821	1.323	1.341
30	9.866	9.852	5.079	5.066
60	9.645	9.645	3.406	3.407
90	8.872	8.871	1.029	1.029

3.2 拉伸型问题

如图 5 所示, 尺寸为 $a \times 2a$ 的矩形平板, 其上下端均受拉应力 σ 作用, 板边缘处有一长度为 $0.5a$ 的裂纹。板材为正交各向异性复合材料, 其中, 材料 1 方向弹性模量 $E_1 = 114.8 \text{ GPa}$, 材料 2 方向弹性模量 $E_2 = 11.7 \text{ GPa}$, 剪切模量 $G_{12} = 9.66 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu_{12} = 0.21$ 。

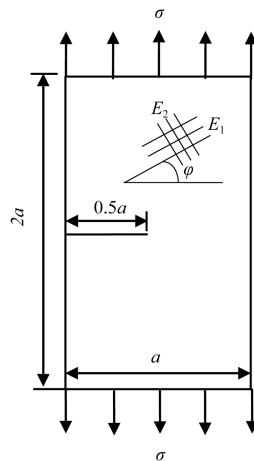


图 5 正交各向异性拉伸板

Fig. 5 Orthotropic plate under tension

模拟时,在矩形板的边界上共设置49个节点,具体分布见图6,图7给出了 $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 时,分别采用本文方法与扩展有限元法^[21]分析得到的裂尖应力强度因子,两者相比较可发现本文方法的计算精度高,进一步体现了本文方法的有效性。

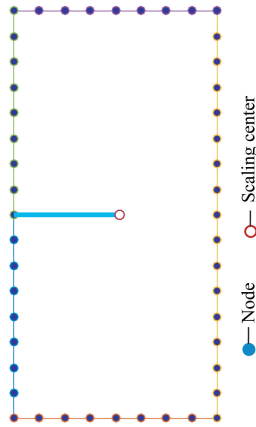


图6 正交各向异性板的离散模型

Fig. 6 Discretization model of the orthotropic plate

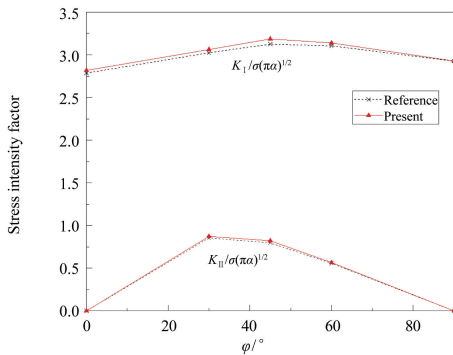


图7 正则化应力强度因子与不同材料主方向角度的关系

Fig. 7 Normalized stress intensity factors for different material main directions

4 结论

本文详细地介绍了以改进的插值型移动最小二乘法为基础建立的插值型无单元伽辽金比例边界法,并采用其分析了正交各向异性材料断裂问题,通过算例分析表明,这种方法在处理正交各向异性材料断裂问题时同样有效,且具有一定的灵活性。这主要归因于以下两点:①引入改进的插值型移动最小二乘插值法,使得形成的形函数具有高阶连续性,很大程度上提高了计算精度与收敛速度;②运用矩阵函数与Schur分解并行的求解技术,避免出现平行特征向量问题,保证了数值解的准确性与稳定性。后续工作将结合本文的研究内容,继续拓展插值型无单元伽辽金比例边界法的研究领域,将该方法应用到正交各向异性材料撕开型裂纹及热传导问题分析中。

参考文献

- [1] TAN C L, GAO Y L. Boundary element analysis of plane anisotropic bodies with stress concentrations and cracks[J]. Composite Structures, 1992, 20(1): 17-28.
- [2] BAYAT S H, NAZARI M B. Thermal fracture analysis in orthotropic materials by XFEM[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2021, 112: 102843.
- [3] 王明亮, 王建辉, 张磊. 含多裂纹损伤圆弧曲梁自由振动扰动的有限元网格自适应分析[J]. 工程力学, 2021, 38(10): 24-33.
- [4] 滕靓媚, 黄君, 黄立新. 基于分层法石墨烯增强功能梯度梁的有限元分析[J]. 复合材料科学与工程, 2022(1): 13-21.
- [5] 陈莘莘, 钟斌. 二维黏弹性力学问题的无网格自然单元法[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(5): 605-612.
- [6] 王冰冰, 高欣, 段庆林. 稳态热传导的二阶一致无网格法[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(7): 750-755.
- [7] 陈莘莘, 王娟. 插值型无单元 Galerkin 比例边界法与有限元法的耦合在压电材料断裂分析中的应用[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(11): 1258-1267.
- [8] 陈莘莘, 周文博, 胡常福. 基于插值型无单元 Galerkin 法的复合材料层合板自由振动分析[J]. 应用力学学报, 2021, 38(3): 1280-1285.
- [9] 王涛, 陈莘莘. 粘弹性问题的插值型无单元伽辽金比例边界法[J]. 力学季刊, 2021, 42(3): 507-516.
- [10] WOLF J P, SONG C M. The scaled boundary finite-element method—a fundamental solution-less boundary-element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2001, 190(42): 5551-5568.
- [11] 章鹏, 杜成斌, 江守燕. 比例边界有限元法求解裂纹面接触问题[J]. 力学学报, 2017, 49(6): 1335-1347.
- [12] 曾亿山, 卢德唐, 曾清红. 无单元伽辽金法的并行计算[J]. 计算力学学报, 2008, 25(3): 385-391.
- [13] ZHANG Z, LIEW K M, CHENG Y M, et al. Analyzing 2D fracture problems with the improved element-free Galerkin method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2008, 32(3): 241-250.
- [14] SUN F X, WANG J F, CHENG Y M. An improved interpolating element-free Galerkin method for elasticity[J]. Chinese Physics B, 2013, 22(12): 47-54.
- [15] WANG J F, SUN F X, CHENG Y M. An improved interpolating element-free Galerkin method with a nonsingular weight function for two-dimensional potential problems[J]. Chinese Physics B, 2012, 21(9): 090204.
- [16] 陈莘莘, 王娟. 反平面断裂问题的无单元伽辽金比例边界法[J]. 计算力学学报, 2017, 34(1): 57-61.
- [17] 陈莘莘, 王娟. 断裂问题的插值型无单元伽辽金比例边界法与有限元法的耦合研究[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48(2): 48-56.
- [18] 陈莘莘, 童谷生, 万云. 弹性力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47(3): 83-90.
- [19] SONG C M. A matrix function solution for the scaled boundary finite-element equation in statics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(23-26): 2325-2356.
- [20] SONG C M, WOLF J P. Semi-analytical representation of stress singularities as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite-element method[J]. Computers and Structures, 2002, 80(2): 183-197.
- [21] ASADPOURE ALIREZA, MOHAMMADI SOHEIL, VAFAI ABOL-HASAN. Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method[J]. Thin-Walled Structures, 2006, 44(9): 1031-1038.